

Zad 1 Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie zadanym przez gęstość $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2 \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$.

Znaleźć rozkład warunkowy $X| |X|$.

Zad 2 Niech (X,Y) będzie wektorem losowym o rozkładzie zadanym przez gęstość $f_{X,Y}(x,y)$. Korzystając z definicji prawdopodobieństwa warunkowego znaleźć gęstość rozkładu warunkowego $Y|X$.

Zad 3 Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Znaleźć rozkłady warunkowe $X| [X]$ oraz $[X] | X$.

Zad 4 Niech (X,Y) będzie wektorem losowym o rozkładzie zadanym przez gęstość $f_{X,Y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{8} e^{-y}$ dla $y > 0, |x| < y$. Znaleźć rozkłady warunkowe $X|Y$ oraz $Y|X$. Obliczyć $P(X > 1|Y = t)$.

Zad 5 Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Wykazać, że rozkład warunkowy $X|X+Y=t$ jest również rozkładem normalnym. Znaleźć parametry tego rozkładu.

Zad 6 Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami λ i μ odpowiednio. Wykazać że rozkład warunkowy $X|X+Y=n$ jest rozkładem dwumianowym. Znaleźć parametry tego rozkładu.

Zad 7 Niech zmienna losowa X ma rozkład $N(0,1)$, a $Y|X$ ma rozkład $N(X, 1)$. Znaleźć rozkład $X|Y$.

Zad 8 Pokazać, że klasyczny wzór na prawdopodobieństwo warunkowe jest szczególnym przypadkiem wzoru ogólnego.

Zad 9 Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tych samych rozkładach wykładniczych z parametrem λ . Wyznaczyć $P(Y > X^2|X+Y)$.

Zad 10 Odcinek $[0,1]$ łamiemy w losowym miejscu zgodnie z rozkładem jednostajnym. Następnie wybieramy dłuższą część i łamiemy ją ponownie zgodnie z rozkładem jednostajnym. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z otrzymanych części można zbudować trójkąt?

Zad 11 Niech X ma rozkład $U([0,1])$, $Y|X$ ma rozkład $U([0,X])$ oraz $Z|Y$ ma rozkład $U([0,Y])$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Z .

Zad 12 Niech X ma rozkład Poissona z parametrem 1. Niech $Y|X$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $1+X$. Wyznaczyć rozkład $X|Y$.

Zad 13 Niech X ma rozkład zadany funkcją gęstości $f_X(x)$. Korzystając z definicji warunkowej wartości oczekiwanej wyznaczyć $E(X|X^k)$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Zad 14 Zmienne losowe X, Y są niezależne o tym samym rozkładzie zadanym przez dystrybuantę $F(t) = (1 - e^{-t^2}) \mathbb{I}_{[0,\infty)}(t)$. Korzystając z definicji warunkowej wartości oczekiwanej wyznaczyć $E(X | \sqrt{X^2 + Y^2})$.

Zad 15 Zmienne losowe X, Y są niezależne o rozkładzie $N(0,1)$. Korzystając z definicji warunkowej wartości oczekiwanej wyznaczyć $E(|XY| | \sqrt{X^2 + Y^2})$.

Zad 16 Zmienne losowe $U_0, U_1, \dots, U_n$ są niezależne o rozkładzie $U([0,1])$. Korzystając z definicji warunkowej wartości oczekiwanej wyznaczyć $E(\max\{U_0, U_1, \dots, U_n\} | U_0)$.

Zad 17 Obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób w schemacie Bernoulego przeprowadzanych aż do momentu uzyskania kolejno dwóch sukcesów i porażki.

Zad 18 Mamy n osiedli położonych wzdłuż drogi w odległości 1km od siebie. Osiedla obsługuje 1 radiowóz policji. Każde kolejne wezwanie z jednakowym prawdopodobieństwem pochodzi z dowolnego osiedla i zostaje natychmiast przekazane do radiowozu, który oczekuje w osiedlu, w którym było ostatnie wezwanie. Jaka jest średnia odległość przejeżdżana przez radiowóz w czasie 1 wezwania.

Zad 19 Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie wykładniczym zadanym przez gęstość $f(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(t)$. Niech zmienna losowa N będzie niezależna od $X_1, X_2, \dots$ i ma rozkład Poissona z parametrem μ . Wyznaczyć $E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{N+1})$.

Zad 20 Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$, zaś N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ niezależną od $X_1, X_2, \dots$.

Niech $M = \begin{cases} \max(X_1, \dots, X_N), & \text{gdy } N > 0 \\ 0, & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$. Oblicz $E(M)$.

Zad 21 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o funkcji gęstości $f(x,y)=cxy$, dla $0 \leq x \leq y \leq 1$. Wyznaczyć funkcje regresji $g(x) = E(Y|X = x)$ oraz $h(y) = E(X|Y = y)$. Narysować w jednym układzie współrzędnych nośnik rozkładu (X,Y) oraz funkcje $g(x)$ i $h(y)$.

Zad 22 Zmienne losowe X, Y są niezależne o tym samym rozkładzie $U[0,1]$. Niech $U = \min\{X, Y\}$ i $V = \max\{X, Y\}$. Wyznaczyć $E(V|U)$ oraz $E(\sin(UV)|U)$ korzystając z gęstości rozkładu warunkowego $V|U$.

Zad 23 Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Zbadaj zbieżność punktową ciągu dystrybuant $F_{Y_n}(t)$ zmiennych losowych $Y_n = n^\alpha \min(X_1, \dots, X_n)$ w zależności od parametru α .

Zad 24 Owad składa jaja każdego dnia niezależnie, zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ . Każdej nocy mrówki kradną mu jaja. Każde jajo może zostać ukradzione, niezależnie z prawdopodobieństwem p . Wyznaczyć rozkład liczby ocalałych jaj po n cyklach. Jaki jest rozkład graniczny jaj ocalonych przed mrówkami gdy $n \rightarrow \infty$? (dodatkowe wyjaśnienie: k -tego dnia owad dokłada losową liczbę jaj (zgodnie z rozkładem Poissona) do tych ocalałych (po $k-1$ cyklach), natomiast k -tej nocy mrówki mogą ukraść każde jajo (nowe lub ocalałe) z tym samym prawdopodobieństwem p i niezależnie).

Zad 25 Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie: $P(X_k = a) = P\left(X_k = \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$, $a > 0$. Z badać zbieżność według rozkładu ciągu zmiennych losowych $Z_n = (X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ w zależności od parametru a . Podać wzór na gęstość rozkładu granicznego.

Zad 26 Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie $U[0, a]$, $a > 0$. Z badać zbieżność według rozkładu ciągu zmiennych losowych $Z_n = (X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ w zależności od parametru a . Podać wzór na gęstość rozkładu granicznego w przypadku gdy ta gęstość istnieje.

Zad 27 Niech X_n, Y_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Poissona z parametrem n . Z badać zbieżność według rozkładu $\frac{X_n^2 - Y_n^2}{n\sqrt{n}}$ gdy $n \rightarrow \infty$. (Wskazówka: Zmienna losowa o rozkładzie Poissona z parametrem n może być zapisana jako suma n niezależnych zmiennych losowych z tego samego rozkładu Poissona z parametrem 1)

Zad 28 Tekst broszury zawiera $n = 100000$ znaków. W trakcie pisania każdy znak może zostać błędnie wprowadzony z prawdopodobieństwem 0,0001. Z kolei redaktor znajduje każdy z błędów z prawdopodobieństwem 0,9, po czym tekst wraca do autora, który znajduje każdy z pozostałych błędów z prawdopodobieństwem 0,5. Stosując przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona oszacować prawdopodobieństwo, że po obu korektach broszura będzie zawierała nie więcej niż 3 błędy. Jaka jest dokładność tego oszacowania?

Zad 29 Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o rozkładach

$$P\left(X_n = \frac{1}{2^n}\right) = P\left(X_n = -\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$$

Wyznaczyć rozkład graniczny $\sum_{i=1}^n X_i$ gdy $n \rightarrow \infty$.

Zad 30 Niech X ma rozkład Poissona z parametrem λ . Wyznaczyć rozkład graniczny $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda+1}}$ gdy $\lambda \rightarrow \infty$. (podpowiedź: wyznaczyć najpierw rozkład graniczny $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$)

Zad 31 Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$. Znaleźć funkcję charakterystyczną zmiennej XY (podpowiedź: warunkowanie)

Zad 32 Niech Z będzie zespoloną zmienną losową. Udowodnić że $|EZ| \leq E|Z|$.

Zad 33 Niech $X_1, X_2, \dots$ będą i.i.d. z rozkładu $U[-1; 1]$. Niech N_n będzie zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \dots$ o rozkładzie Poissona z parametrem n . Wyznaczyć granicę funkcji charakterystycznych zmiennych losowych $\frac{\sum_{i=1}^{N_n+1} X_i}{\sqrt{n}}$ oraz znaleźć rozkład asymptotyczny $\frac{\sum_{i=1}^{N_n+1} X_i}{\sqrt{N_n+1}}$ gdy $n \rightarrow \infty$.

Zad 34 Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną $\varphi(t) = \cos^3 t$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Y = X^3 - 3X^2 + 1$.

Zad 35 Niech p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w próbach Bernoulliego. Niech N będzie zmienną losową oznaczającą liczbę prób potrzebnych do uzyskania n sukcesów. Udowodnić że graniczny rozkład gdy $p \rightarrow 0$ zmiennej losowej $2pN$ jest rozkładem chi-kwadrat. Funkcja charakterystyczna rozkładu chi-kwadrat o k stopniach swobody: $\varphi_{\chi_k^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}$. Korzystając z pochodnej funkcji charakterystycznej wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu granicznego.

Zad 36 Pokazać że funkcja $g(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\pi} & , \quad |t| < \pi \\ 0 & , \quad |t| \geq \pi \end{cases}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu. Wyznaczyć ten rozkład.

Zad 37 Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach zadanych przez gęstości $f_{X_k}(x) = \frac{3}{4k^3} (k^2 - x^2) \mathbb{1}_{(-k,k)}(x)$. Czy dla tego ciągu zachodzi CTG?

Zad 38 Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach Poissona $X_n \sim P(2^{-n})$ oraz $Y_1, Y_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych $Y_n \sim N(0, 2^{-n})$. Sprawdzić, czy dla tych ciągów spełnione są założenia twierdzenia Lapunowa oraz czy zachodzi CTG.

Zad 39 Prawdopodobieństwo prawidłowej reakcji na k -ty sygnał testu psychofizycznego wynosi $p_k = 0,3 + 2^{-k}$. Korzystając z CTG oszacuj prawdopodobieństwo tego, że testowana osoba zareaguje prawidłowo na przynajmniej 35 spośród 100 sygnałów, jeżeli reakcje na poszczególne sygnały są od siebie niezależne.

Zad 40 Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ oraz $Y_1, Y_2, \dots$ są niezależne, $X_k \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $Y_k \sim B\left(1, \frac{1}{4}\right)$. Korzystając z CTG oszacuj $P\left(\sum_{i=1}^{349} X_i > \sum_{i=1}^{651} Y_i\right)$.

Zad 41 Na pewnej drodze ekspresowej ustawiono fotoradar (zaraz za znakiem ograniczenia prędkości). Liczba wykonanych przez niego zdjęć ma rozkład Poissona z parametrem $9X$, gdzie X jest czasem jego działania. Oblicz prawdopodobieństwo, że fotoradar wykona więcej niż 8 zdjęć przy założeniu, że czas jego działania ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.

Zad 42 Niech $X_1, X_2, \dots, X_N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-1; 1]$, a N zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \dots$ o następującym rozkładzie dyskretnym: $P(N = k) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ dla $k = 1, 2, \dots$. Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$.

Zad 43 Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim że $P(X_k = i) = P(X_k = -i) = \frac{1}{2k}$, dla $i = 1, 2, \dots, k$. Sprawdź czy dla tego ciągu zachodzi CTG.

Zad 44 Zmienne losowe $I_1, I_2, \dots$ i $X_1, X_2, \dots$ są niezależne. Każda ze zmiennych I_i ma taki sam rozkład prawdopodobieństwa $B(1, p)$. Każda ze zmiennych X_i ma taki sam rozkład prawdopodobieństwa taki, że $E(X_i) = m$ oraz $V(X_i) = \sigma^2 > 0$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n I_i X_i$ oraz $K_n = \sum_{i=1}^n I_i$. Zbadaj zbieżność według rozkładu $\frac{S_n - mK_n}{n^\alpha}$ gdy $n \rightarrow \infty$ w zależności od parametru α .

Zad 45 Pokazać, że gdy $X_n \sim AN(n, 2n)$ to $\frac{n-1}{n} X_n \sim AN(n, 2n)$ ale nie prawda że $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} X_n \sim AN(n, 2n)$. Czy $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} X_n \sim AN(a_n, b_n)$ dla pewnych a_n, b_n ?

Zad 46 Niech X_n ma rozkład Poissona z parametrem n . Zbadaj zbieżność według rozkładu zmiennej losowej $Y_n = \sqrt{n} \arctg \frac{X_n - n}{X_n + 1}$.

Zad 47 Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $B(1, p)$. Niech $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Udowodnij że $2\bar{X}_n \sim AN(a_n, b_n)$. Podaj wzór na a_n oraz b_n .

Zad 48 Niech $X_1, X_2, \dots$ będą i.i.d. z rozkładu $U[0; 1]$. Czy $\frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n}} \sim AN(a_n, b_n)$ dla pewnych a_n, b_n ? Jeśli tak to podaj wzór na a_n, b_n .

Zad 49 Niech N_t będzie procesem Poissona o intensywności λ . Oblicz $Cov(N_t, N_s)$.

Zad 50 Niech N_t będzie procesem Poissona o intensywności λ . Oblicz $P(N_1 = 1, N_2 \leq 2, N_3 \leq 3)$.

Zad 51 Niech N_t będzie procesem Poissona o intensywności λ niezależnym od nieujemnej zmiennej losowej T o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2 . Oblicz $Cov(T, N_T)$ oraz $Var(N_T)$.

Zad 52 Niech N_t będzie procesem Poissona o intensywności λ . Niech T_n oznacza moment zajścia n -tego zdarzenia. Wyznacz dystrybuantę i gęstość rozkładu warunkowego $T_4 | N_1 = 2$. Oblicz $E(T_4 | N_1 = 2)$.